Attrazione fatale

di Carlo Maria Polvani

Ha appena compiuto vent'anni il progetto matematico conosciuto con l'acronimo *Gimps* (*Great Internet Mersenne Prime Search*) che ha come scopo di individuare dei numeri primi sempre più grandi. L'ultimo è stato identificato tre anni fa da Curtis Cooper dell'università del Missouri ed è cosi lungo che non basterebbero migliaia di pagine per scriverlo; per questo, lo si rappresenta utilizzando la squisita formula escogitata dal religioso dell'Ordo minimorum Marin Mersenne (1588-1684), amico e compagno di Réné Descartes (1596-1650) al prestigioso collegio Henry iv di La Flèche: 2n–1 (*in casu* n essendo uguale a 57.885.161, 2 moltiplicato per se stesso quasi 58 milioni di volte meno 1). Commentando la scoperta di Cooper, Roberto Volpi, in *Il fascino dei numeri primi, un universo da esplorare*, pubblicato nella sezione Polemiche culturali di «Vita e Pensiero», sesto numero del 2015, ha proposto una riflessione sui numeri primi dagli stimolanti risvolti filosofico-teologici. Per capirne la pertinenza, è utile addentrarsi in detto universo, con umiltà.

I numeri interi positivi (0, 1, 2, 3...) sono detti "naturali" perché si distinguono dai numeri "reali" che invece hanno uno sviluppo decimale (per esempio 2,75 o 13,38673). I numeri naturali possono essere o "composti" o "primi". Un naturale è composto quando esiste almeno un altro numero naturale più piccolo di esso che non sia 1 e che lo possa dividere in un altro naturale (6 è composto poiché 6 diviso 3 è uguale 2). In caso contrario è primo, poiché dividendolo per qualsiasi naturale più piccolo, eccetto 1, si ottiene un numero reale (5 è primo, giacché: 5 diviso 4 è uguale 1,25; 5 diviso 3 è uguale 1,67; e 5 diviso 2 è uguale a 2,50). Ne consegue che: tutti i numeri pari (eccetto 2) sono composti perché sono multipli di due; che tutti i naturali che finiscono per 5 (eccetto 5) sono composti poiché sono multipli di 5; e anche che tutti i naturali la cui somma delle cifre è uguale a un multiplo di tre, non possono essere primi, poiché sono multipli di 3. Queste semplicissime osservazioni spiegano probabilmente perché gli uomini dovettero cimentarsi con i numeri primi sin dai tempi preistorici.

All'incirca 20mila anni fa alcuni *homo sapiens* del lago Edoardo nella Repubblica Democratica del Congo scalfirono una serie di tacche su un osso di babbuino, rappresentative di un sistema decimale atto a effettuare moltiplicazioni e divisioni. Il cosiddetto "osso di Ishango", ritrovato nel 1960 da Jean de Hinselin de Braoucourt (1920-1998) e conservato a Bruxelles dall'Institut royal des Sciences naturelles de Belgique, riporta tre colonne costituite da una serie di numeri; quella di sinistra è dedicata proprio ai numeri primi fra il 10 e il 20, ossia: 11, 13, 17 e 19. Se l'utilità dei numeri primi fu quindi presto riconosciuta come imprescindibile, più difficile risultò lo sforzo per la loro sistematica identificazione.

Tanto più grande è un naturale, infatti, quanto più difficile il compito di dimostrare che sia primo; poiché mentre per individuare un numero composto è sufficiente trovare un solo naturale che sia suo divisore, per riconoscere un primo bisogna dimostrare che le divisioni con tutti i numeri naturali più piccoli di esso risultano in un reale.

Ben tre dei tredici libri che compongono gli *Elementi* di Euclide — opera il cui numero di edizioni, più di mille, la più interessante delle quali si trova nella Biblioteca Vaticana, è inferiore solo a quelle della Bibbia — considerano proprio la singolarità dei numeri primi. Essendo la collezione di teoremi che il grande matematico di Alessandria raccolse durante il regno di Tolomeo i (323-283 prima dell'era cristiana) la base, oltre che della geometria anche della cosiddetta "teoria dei numeri" (per esempio il ramo della matematica che si occupa dei numeri interi), tutti i grandi matematici si sono dovuti confrontare con una intuizione espressa nel libro ix: «I numeri primi sono più di una qualsiasi moltitudine assegnata di numeri primi».

Che ci fosse un'infinità di numeri primi fu poi confermato da Leonardo Eulero (1707-1783), ma quello che affascinò subito i matematici antichi, al punto da disegnare algoritmi di identificazione dei primi come il brillantissimo "crivello di Erastotene" di Cirene (275-195 prima dell'era cristiana), fu il fatto che i primi potessero essere usati per scrivere qualsiasi composto nella sua forma più basilare. Si consideri per esempio 720 che è il risultato della moltiplicazione dei numeri dal 2 al 6: se 720=2x3x4x5x6, allora 720=2x3x(2x2)x5x(2x3) e pertanto 720=2x2x2x2x3x3x5. Quest'ultima formula è da ritenersi la più fondamentale di tutte visto che i primi, 2, 3 e 5 non possono più essere smembrati come si è fatto invece per i composti 4 e 6.

Questa qualità, che è diventata determinante nella crittografia asimmetrica — è detta asimmetrica la scrittura in codice nella quale la formula usata da chi decifra un messaggio è diversa da quella usata da colui che lo ha criptato — che è alla base del sistema dei pagamenti digitali moderni, è la causa ultima di problemi matematici fondamentali, a volte irrisolti a tutt'oggi, che riguardano la frequenza dei primi e la loro relazione con i numeri naturali. Si pensi, per esempio alla congettura di Christian Golbach (1690-1764) che prevede che ogni numero pari possa essere scritto come la somma di due numeri primi, come: 8=5+3 o 12=5+7; o alla teoria dei numeri primi gemelli presentata nella sua forma più primitiva da Alphonse de Polignac (1780-1847) che presume l'esistenza di coppie infinite di numeri primi separati da un numero in mezzo, come: 5 e 7 o 17 e 19 (da qui l'ispirazione di Paolo Giordano per il romanzo che vinse il Premio Strega nel 2008, *La solitudine dei numeri primi*); o, infine, l'ipotesi di Marie-Sophie Germain (1776-1831) che studiò quei numeri primi che moltiplicati per due danno un altro numero primo se si aggiunge 1, come: 5 poiché (5x2)+1=11, ma non 7, visto che (7x2)+1=15. Né il geniale Pierre de Fermat (1601-1665), né il *princeps mathematicorum* Carl Friedrich Gauss (1777-1855) seppero resistere all'attrazione fatale dei numeri primi, i quali grazie al fascino esercitato su Bernhard Riemann (1826-1866), diventarono protagonisti anche dell'aspetto matematico della Teoria generale della relatività.

Con tali premesse, come biasimare Volpi quando afferma che pur essendo all'interno dei numeri interi, i primi formano «un universo a se stante poiché più costitutivi e più fondanti»? E come non raccogliere la sua sfida quando suggerisce che sebbene l'insieme dei naturali e l'insieme dei primi siano entrambi infinti, le qualità dei numeri primi sono tali da fare sospettare che l'universo dei primi e l'universo dei naturali non siano «nello stesso ordine di infinità»? Le conseguenze di tali suggerimenti non andrebbero minimizzate, poiché il concetto stesso di infinità potrebbe uscirne, filosoficamente e forse anche teologicamente parlando, reinterpretato.

La provocazione di Volpi, infatti, non può non ricordare quella di Georg Cantor (1845-1918). Il padre della teoria degli insiemi, nonché gran cultore di filosofia e di teologia, studiò la possibilità di insiemi infiniti più grandi di altri insiemi infiniti, poiché composti loro stessi da insiemi infiniti. Conscio che le sue proposte avrebbero sconvolto più di un matematico — Jules Henry Poincaré (1854-1912) lo attaccò ferocemente — e più di un teologo — intrattenne una corrispondenza con gesuiti del calibro del cardinale Johann Baptist Franzelin (1816-1886), di Tilman Pesch (1836-1899) e di Joseph Hontheim (1858-1929) — lo scienziato tedesco scrisse persino a Papa Leone XIII, per dimostrare che la sua tesi non solo non rimetteva in questione l'assoluta infinitezza di Dio, ma anzi, sarebbe stata un efficace baluardo contro il determinismo e il materialismo.

Un altro matematico prussiano, David Hilbert (1862-1943), considerato fra i più influenti dell'era moderna e formulatore dei celeberrimi *23 Probemi di Hilbert* — i 23 quesiti più difficili della matematica, il primo dei quali riguarda proprio i lavori di Cantor e l'ottavo riguarda appunto la frequenza della distribuzione dei numeri primi — affermava, con fideismo irriverente, che «nessuno potrà cacciarci dal Paradiso che Cantor ha creato» per noi. Volpi ne ha fornito un'ulteriore prova.

Pubblicato in *L'Osservatore Romano*, 26/01/2016